Научная статья
УДК 517.44 : 517.95
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-52-73

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЛАМБЕРТОВОЙ КРИВОЙ ПО СТЕРЕОПАРЕ ЕЁ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Евгений Юрьевич Деревцов

Институт математики Сибирского отделения Российской Академии
им. С. Л. Соболева,
Новосибирск, Россия

E-mail: dert@math.nsc.ru; eydert@mail.ru;
https://orcid.org/0000-0003-2013-3380

Аннотация

В рамках постановок обратных задач фотометрии изучается вопрос единственности определения расположения и светимости кривой, излучающей в соответствии с законом Ламберта, по стереопаре ее изображений. Изучены причины возникновения неоднозначности при определении расположения таких кривых. Установлены критерии единственности решения задачи восстановления ламбертовой кривой по стереопаре для произвольных весовых функций. Результаты распространены на конкретные семейства весовых функций, моделирующих степень прозрачности среды, ее поглощение или рассеяние.

Ключевые слова и фразы

фотометрия, ламбертова кривая, обратная задача, проекционная схема, весовая функция, неявное уравнение, ветвление, сопровождающая точка.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания Институту математики им. С. Л. Соболева, проект FWNF-2022-0009(122041100003-2)).

Для цитирования

Деревцов Е. Ю. О единственности определения ламбертовой оптической кривой по стереопаре ее изображений // *Математические труды*, 2024, Т. 27, № 3, С. 52-73. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-52-73

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 52-73
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 52-73

UNIQUE RECOVERY OF A LAMBERTIAN CURVE FROM STEREO-COUPLE OF IMAGES

Evgeny Yu. Derevtsov

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. 630090, Novosibirsk, Russia.
dert@math.nsc.ru; eydert@mail.ru;
https://orcid.org/0000-0003-2013-3380

Abstract

Within the framework of statements of inverse problems of photometry, the problems of uniqueness of determining the location and luminosity of a curve, radiating by Lambert's law, are explored from its stereo-couple of images. The reasons for the ambiguity in determining the location of such curves are studied. We establish criteria for the uniqueness of the solution to the problem of recovering luminous curves by stereo-couples of images for arbitrary weight functions. The results are applied to specific families of weight functions that model the degree of transparency of a medium, its absorption or scattering.

Keywords

photometry, Lambertian curve, inverse problem, projection device, weight function, implicit equation, branching, attendant point.

Funding

The work was carried out by the State task for Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, project FWNF-2022-0009(122041100003-2)

For citation

Derevtsov E. Yu. Unique recovering of a Lambertian curve by stereo-couple of images // *Mat. Trudy*, 2024, V. 27, N. 3, P. 52-73. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-3-52-73

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 52-73
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 52-73

§ 1. Введение и предварительные сведения

Развитие дистанционных методов исследований Земли привело к возникновению класса новых задач, таких как контроль за окружающей средой, лесными и сельскохозяйственными угодьями, построение карт участков земной поверхности [1]. В математических терминах это задачи интегральной геометрии по определению характеристик объектов, которые описываются средствами теории обобщенных функций [2].

Основная задача фотограмметрии, состоящая в оцифровке рельефа местности по нескольким ее изображениям [3], остается по-прежнему актуальной. К настоящему времени в связи с широким использованием космических спутников и беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) лавинообразно возрос объем исходной информации в форме аэро-, космических, и БПЛА-снимков. Заметно расширился круг практических задач, которые требуется решать по информации в форме БПЛА-изображений. Методики обработки полученной информации, как и ранее, нуждаются в развитии математического аппарата, разработке новых алгоритмов и автоматизированных систем обработки снимков в режиме реального времени [4]. Типичная особенностью задач такого рода — гигантский объем исходных данных. Так, количество изображений в пределах одного и того же проекта может достигать нескольких тысяч, и их “ручная“ обработка практически невыполнима [5].

В качестве данных для проведения фотограмметрических работ обычно выступает стереопара изображений участка поверхности. При обработке такой информации применяют известный прием, используемый в прикладных математических исследованиях, который позволяет сводить трехмерную задачу к серии двумерных. Наиболее яркий пример здесь — томография, даже в названии которой (“tomos“ — слой) отражен способ исследования объекта. Стереопару изображений довольно просто свести к серии “плоских изображений“ путем практической реализации таких понятий, как эпиполярная плоскость (плоскость, проходящая через центры объективов двух оптических систем), пара эпиполярных отрезков на снимках стереопары, и эпиполярная линия, принадлежащая поверхности и представляющая собой след эпиполярной плоскости на рельефе, который подлежит определению [3]. Для его однозначного восстановления необходимо знание координат хотя бы одной точки, лежащей на каждой эпиполярной линии. Следовательно, возвращаясь к трехмерной задаче, как минимум должна быть известна линия, которая принадлежит рельефу и трансверсальна прямой, проходящей через центры объективов оптических систем.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 52-73
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 52-73

Под задачей восстановления кривой (2D задачей) далее подразумевается задача восстановления следа эпиполярной плоскости на рельефе по ее известным следам на эффективных областях двух проекционных схем. В работе исследуются условия, выполнение которых гарантирует единственность решения 2D задачи определения оптической кривой, функция яркости которой в каждой точке изотропна по всем направлениям, то есть подчиняется закону Ламберта.

Предложенный в [6], [7] метод восстановления ламбертовой оптической поверхности в n-мерном евклидовом пространстве сводится к решению системы неявных уравнений, сконструированных на основе ее резких изображений и параметров проекционных схем. При этом невозможно исключить вариант вырождения системы. Точки, принадлежащие искомой поверхности, принадлежат множеству решений системы, но не всякое ее решение является точкой поверхности. Поэтому необходимо исследовать как множество точек, в которых могут нарушаться условия единственности решения системы (*критических точек*), так и все множество решений, которое может содержать и не принадлежащие поверхности *сопровождающие точки.* Особое значение в этой ситуации приобретают точки, в которых решение системы неявных уравнений перестает быть единственным и разделяется на ветви — *точки ветвления.* Последние, с одной стороны, являются критическими точками, а с другой — предельными точками множества сопровождающих точек.

Настоящая статья завершает серию из трех работ ([8], [9], настоящая работа) по исследованию единственности решения задачи интегральной геометрии по определению обобщенных функций с неизвестным носителем, сосредоточенным множествах топологической размерности 0, 2 и 1. Поставленные задачи могут быть охарактеризованы и как неклассические задачи томографии.

В первом параграфе изложены вводные замечания, основные определения и понятия, общая постановка задачи в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. В остальной части работы рассматривается случай $n = 2$. В начале второго параграфа изложены исследования критических, сопровождающих точек и точек ветвления. Устанавливаются, излагаются и формулируются их основные свойства и взаимосвязи, в общих случаях изложенные в [6], [9], для конкретного случая 2-мерного евклидова пространства. Строится векторное поле, зависящее от весовых функций фильтрации и параметров проекционных схем, играющее существенную роль при анализе единственности решения задачи. В остальной части параграфа при $n = 2$ устанавливаются оригинальные результаты. Так, связи между построенным векторным полем и поведением функции яркости в критических точках позволяют судить о наличии точек ветвления у кривой. Рассмотрены частные случаи конкретных семейств весовых функций. Третий параграф посвящен установлению более общих критериев единственности решения задачи восстановления ламбертовой оптической кривой по ее изображениям. Результаты, полученные в случае произвольных весовых функций, уточняются в случае размещения участков ламбертовой оптической кривой в средах с различными оптическими свойствами, такими как поглощение различной природы или рассеяние.

Приведем общие сведения, необходимые при построения математической модели фотометрии [6] в евклидовом пространстве $mathbbR^n$, $n \geq 2$
.

Определим в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *проекционную схему* (ПС) $\mathcal{F} = \{q, E, W, F\}$, которая включает в себя: (a) точку q — объектив ПС $\mathcal{F}$; (b) гиперплоскость E, называемую *экраном*; (c) открытую выпуклую ограниченную область $W \subset E$ — *эффективную область*; (d) функцию $F(x, w)$ переменных $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in E$, называемую *фильтрацией* ПС $\mathcal{F}$.

Для указанных объектов выполняются следующие условия: (1) точка $q \notin E$ находится на расстоянии d_1 от E; (2) эффективная область W содержит точку w_0, являющуюся точкой пересечения с экраном E прямой, проходящей через точку q ортогонально экрану E; (3) фильтрация $F(x, w)$ непрерывна по $x \in \mathcal{F}_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \langle x - q, q - w_0 \rangle > 0\}$, и является обобщенной комплекснозначной по $w \in E$.

Через $n_F := (q - w_0)/|q - w_0|$ обозначаем единичный вектор, ортогональный экрану E и направленный из точки q в область $\mathcal{F}_+$. Если $x \in \mathcal{F}_+$, то ее *геометрическим изображением* называется точка $P(x) \in E$, определенная формулой

$$P(x) = q - d_1 \frac{q - x}{\langle q - x, n_F \rangle}. \tag{1}$$

Собственной системой координат проекционной схемы $\mathcal{F}$ называется система координат в $\mathbb{R}^n$, связанная с каким-либо ортонормированным базисом $e_1, \dots, e_{n-1}, n_F$. Ниже будут рассматриваться *изопланатические* δ-*образные* проекционные схемы, фильтрация которых имеет вид

$$F(x, w) = \frac{c_{\mathcal{F}}(x)}{|q - x|^{n-1}} \delta(w - P(x)),$$

где геометрическое изображение $P(x)$ точки x задано формулой (1), δ — δ-функция Дирака.

Под ламбертовой оптической поверхностью понимается пара $\big(M, A\big)$, состоящая из поверхности $M \subset \mathbb{R}^n$ и положительной *функции яркости* $A(x)$, $x \in M$. Считаем заданными в $\mathbb{R}^n$ n проекционных схем $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ с непустой допустимой областью $\mathcal{X}_\pi = \cap_{j=1}^n \mathcal{F}_{j+}$. Предполагается, что участок поверхности $M_\pi = M \cap_{j=1}^n \mathcal{F}_{j+}$ таков, что для любой точки $x \in M_\pi$ век-

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 52-73
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 52-73

торы $q_j - x$, $j = 1, \dots, n$ линейно независимы и $\langle q_j - x\,, \nu_x \rangle > 0$, $j = 1, \dots, n$. Здесь ν_x — нормаль к поверхности M в точке x. Условия положительности скалярных произведений эквивалентно *"условию видимости"* участка поверхности M_π по отношению ко всем точкам $q_1, \dots, q_n$. Иными словами, прямые $\mathcal{L}_{q_j x}$, $j = 1, \dots, n$, проходящие через точки q_j и x, пересекают M_π только в одной точке.

Одна из постановок обратной задачи фотометрии формулируется следующим образом. По заданному набору изображений источника, полученных посредством ПС, определить геометрическое расположение в $\mathbb{R}^n$ источника и функцию A, описывающую его светимость. Заметим, что если количество ОС достаточно велико, они расположены равномерно вокруг источника, топологическая размерность которого совпадает с размерностью пространства, то сформулированная задача известна как задача томографии [10]. Если в тех же условиях интересует лишь геометрические характеристики объекта, тогда мы имеем дело с геометрической томографией [11]. Обратную задачу фотометрии можно трактовать как задачу томографии по восстановлению обобщенных функций с сингулярным носителем топологической размерности 0 [8], 1 (настоящая работа), 2 [9]. Методы решений таких задач уникальны и имеют мало общего с методами решения традиционных задач томографии. С другой стороны, они не требуют столь большого объема исходной информации, который необходим для решения задач томографии с хорошей точностью.

Всюду далее рассматривается обратная задача фотометрии, поставленная в двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$. В качестве данных для решения задачи используется стереопара, состоящая из двух резких изображений. Более точно, используются следы той же эпиполярной плоскости на эффективных областях W_j, $j = 1, 2$. Сохраняются соглашения, принятые ранее, но определения и результаты приведены в соответствие с терминологией, принятой для евклидовой плоскости. Так, пару (l, A), состоящую из кривой и положительной функции яркости $A(x)$, $x \in l$, называем ламбертовой (оптической) кривой. Через $\mathcal{X}_\pi$ обозначаем множество $\mathcal{F}_{1+} \cap \mathcal{F}_{2+}$, а через l_π — множество $l \cap \mathcal{X}_\pi \neq \emptyset$. Требуется найти участок $l_\pi \subset l$ ламбертовой кривой l и функцию яркости $A(x)$, $x \in l_\pi$, заданным в $\mathbb{R}^2$, по известным резким изображениям u_j этого участка и заданным весовым функциям c_j, $j = 1, 2$.

Введем следующие обозначения:

$$s_j = |x - q_j|, \;\; \xi_j = \frac{x - q_j}{|x - q_j|}, \;\; \cos\psi_j = \frac{\langle x - q_j, n_F \rangle}{|x - q_j|} = \langle \xi_j, n_F \rangle, \;\; j = 1, 2.$$

Резкие фотометрические изображения ламбертовой кривой (l, A) задаются формулами

$$u_j(w) = \frac{1}{d_1} A(P_j(x)) c(x, q_j) \cos^2 \psi_j, \quad j = 1, 2. \tag{2}$$

В качестве весовых используются функции $c_j(x) \equiv c(x, q_j)$ следующих классов:
(WF1) $c(x, q_j) = \mathrm{const}$;
(WF2) $c(x, q_j) = \mathrm{e}^{-\varepsilon |q_j - x|}$;
(WF3) $c(x, q_j) = \mathrm{e}^{-\sigma^2 |q_j - x|^2}$;
(WF4) $c(x, q_j) = |q_j - x|^r$, $r \neq 0$.
При этом $j = 1, 2$, r, σ вещественны, ε может быть как положительной вещественной, так и комплексной константой.

Для решения задачи определения ламбертовой кривой строится неявное уравнение

$$G(x) = 0, \quad G(x) = \frac{u_1(x)}{u_2(x)} - \frac{c(x, q_1) \cos^2 \psi_1(x)}{c(x, q_2) \cos^2 \psi_2(x)}, \tag{3}$$

$x \in \mathcal{X}_\pi$. Функция $G(x)$ строится следующим образом. Задавая точку $x \in \mathcal{X}_\pi$, находим точки $w_1 = W_1 \cap \mathcal{L}_{q_1 x}$, $w_2 = W_2 \cap \mathcal{L}_{q_2 x}$, представляющие собой пересечения эффективных областей W_1, W_2 и прямых, проходящих через точки q_1, x и q_2, x, соответственно. Придавая резким изображениям $u_1(x)$, $u_2(x)$ в точке x (известные) значения в точках $w_1 = P_1(x)$, $w_2 = P_2(x)$, убеждаемся в том, что функция $G(x)$ сформирована, так как остальные выражения, входящие в уравнение (3), определены в любой точке $x \in \mathcal{X}_\pi$.

Точки участка l_π кривой l принадлежат множеству решений уравнения (3). Если установлено множество l_π (носитель яркости), то нахождение функции яркости $A(x)$ при известных резких изображениях участка кривой $l_\pi \subset l$ не представляет сложности. Уравнение (3) может обладать решениями, не принадлежащими l_π, что ставит вопрос о единственности решения обратной задачи. Таким образом, необходимо выделить искомый участок l_π кривой из множества всех решений уравнения (3). В свою очередь, для этого нужно найти и сформулировать условия, выполнение которых гарантирует единственность решения обратной задачи фотометрии, поставленной в $\mathbb{R}^2$.

§ 2. Области ветвления, сопровождающие и критические точки

В дальнейшем считаем весовые функции c_j проекционных схем $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ класса гладкости C^2 при $x \in \mathcal{X}_\pi$, кривую l класса гладкости C^1, функции яркости $A(x)$ класса гладкости C^1 при $x \in l$. Заметим, что в этих условиях функция $G(x)$ непрерывно дифференцируема.

Приводимые ниже определения и связанные с ними первоначальные результаты изложены в [6] — при постановке задачи в $\mathbb{R}^n$; в [8], [9] при постановке задачи в $\mathbb{R}^3$. Ниже для связности изложения они формулируются в условиях постановки задачи в $\mathbb{R}^2$.

Точку $x \in l_\pi$ назовем *критической в ситуации* $\{(l, A), \pi\}$, если $\dfrac{\partial G}{\partial x^j} = 0$ для $j = 1, 2$. Точка $y \in \mathcal{X}$ называется *сопровождающей в ситуации* $\{(l, A), \pi\}$, если y является решением уравнения (3) и $y \notin l_\pi$. Точка $x \in l_\pi$ называется *точкой ветвления пары* (l, A) относительно семейства π, если в каждой ее окрестности (в $\mathbb{R}^2$) найдется точка, сопровождающая в ситуации $\{(l, A), \pi\}$.

Производную функции f в точке x по направлению вектора $m \in \mathbb{R}^2$ обозначаем $\dfrac{\partial f(x)}{\partial m}$, и, таким образом,

$$\frac{\partial f(x)}{\partial m} = \langle \nabla f(x), m \rangle = \big(\mathrm{d} f(x)\big)(m),$$

где ∇ — градиент, а $\mathrm{d}f(x)$ — дифференциал функции f в точке x. Положим

$$m_j = \frac{q_j - x}{|q_j - x|}, \quad f_j = \frac{\partial \ln c_j(x)}{\partial m_j} = \frac{\langle \nabla c_j(x)\,,\, m_j \rangle}{c_j(x)}, \quad j = 1, 2, \tag{4}$$

и обозначим через τ единичный касательный вектор к кривой l в точке x. Дифференциальную форму ω_π первой степени на множестве l_π зададим соотношениями

$$\big(\omega_\pi(x)\big)(\tau) = \frac{\langle m_1, \nu_x \rangle f_2 - \langle m_2, \nu_x \rangle f_1}{|\langle m_2, \nu_x \rangle m_1 - \langle m_1, \nu_x \rangle m_2|}, \tag{5}$$

где ν_x — нормаль к кривой l в точке $x \in l_\pi$, такая что $\langle \nu_x, m_j \rangle > 0$, $j = 1, 2$. Векторы $q_j - x$, $x \in l_\pi$, линейно независимы, следовательно вектор τ образует базис касательного к кривой l в точке x пространства. Тогда форма ω_π определена на любом касательном к кривой l в точке $x \in l_\pi$ векторе.

Для случая $n = 2$ переформулируем теорему и два предложения [6], [9], которые необходимы в дальнейшем.

Теорема 2.1. *1. Точка $y \in \mathcal{X}_\pi$ является сопровождающей в ситуации $\{(l, A), \pi\}$ тогда и только тогда, когда*

$$\frac{c_1(x_1)}{c_1(y)} A(x_1) = \frac{c_2(x_2)}{c_2(y)} A(x_k), \quad y \notin l_\pi, \tag{6}$$

где x_j — точка пересечения множества l_π с прямой $\mathcal{L}_{yq_j}$, $j = 1, 2$.
2. Пусть $x \in l_\pi$ — точка ветвления ламбертовой кривой (l, A) для проекционных схем $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$. Тогда $\mathrm{d}A(x) = -A(x)\omega_\pi(x)$, где $\mathrm{d}A(x)$ — форма-диффференциал функции яркости A.
3. Точка $x \in l_\pi$ является критической в ситуации $\{(l, A), \pi\}$ тогда и только тогда, когда $\big(\mathrm{d}\ln \mathrm{A}\big)(x) = -\omega_\pi(x)$.

Предложение 2.2. *1. Множество критических точек в ситуации $\{(l, A), \pi\}$ замкнуто.*
2. Множество точек ветвления пары (l, A) относительно проекционных схем $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ замкнуто.
3. Объединение множеств сопровождающих в ситуации $\{(l, A), \pi\}$ точек и точек ветвления пары (l, A) замкнуто.
4. Если точка $x \in l_\pi$ является точкой ветвления пары (l, A) относительно проекционных схем $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, то x — критическая точка.

Напомним, что точка $x \in l$ является критической точкой функции яркости A, если $\mathrm{d}A(x) = 0$. Точка $x \in l$ является регулярной точкой функции яркости A, если $\mathrm{d}A(x) \neq 0$.

Предложение 2.3. *Если яркость A ламбертовой кривой (l, A) имеет конечное число критических точек на светящейся части (l, A), то по двум резким изображениям, полученных посредством проекционных схем $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, участок кривой l_π и яркость на нем определяются однозначно, если дополнительно известно положение хотя бы одной регулярной для A точки.*

Пусть U — открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^2$ такое, что его замыкание $\bar{U}$ принадлежит области $\mathcal{X}_\pi \neq \emptyset$. Ламбертова кривая (l, A) такова, что $l \cap \mathcal{X}_\pi \neq \emptyset$ и $U \cap l_\pi \neq \emptyset$. Будем говорить, что множество U является *областью ветвления* пары (l, A) относительно семейства π, если существует функция $\widetilde{A}(y)$, $y \in U$, класса C^1 такая, что:
– (a) ее ограничение на $l_\pi \cap U$ совпадает с функцией $A(x)$, $x \in l_\pi \cap U$;
– (b) для всякой точки $x \in l_\pi \cap U$ выполнены соотношения $c_j(x)A(x) = c_j(x + y_j)\widetilde{A}(x + y_j)$ для $y_j \in \mathcal{L}_{xq_j} \cap U$, $j = 1, 2$.

Кратко неформально опишем область ветвления U. По-существу, это описание близко описанию области ветвления, приведенному в [9] в трехмерном случае. Предположим, что ламбертова кривая (l, A) обладает областью ветвления. Тогда возможно построение семейства кривых Sl. При этом каждая кривая $\widetilde{l} \in Sl$ вне области U совпадает с кривой l, а внутри U получена гладкой деформацией вдоль прямых $\mathcal{L}_{xq_j}$, $x \in l_\pi \cap U$, $j = 1, 2$. Деформация при этом осуществляется таким образом, чтобы участок кривой

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 52-73
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 52-73

$l_\pi \cap U$ удовлетворял условию видимости из точек q_1, q_2. Функция яркости B на множестве $l_\pi \cap U$ определяется как ограничение на него функции $\widetilde{A}$, а вне его совпадает с исходной функцией яркости A. Иными словами, семейство ламбертовых кривых $(Sl, \widetilde{A})$ таково, что любая пара $(\widetilde{l}, B)$, $\widetilde{l} \in Sl$ дает одни и те же резкие изображения на эффективных областях W_j проекционных схем $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$. Любая точка $y \in \widetilde{l}_\pi \cap U$ есть точка ветвления пары $(\widetilde{l}, B)$ относительно семейства π. Точка $x \in U \setminus (l_\pi \cap U)$ является сопровождающей в ситуации $\{(\widetilde{l}, B), \pi\}$. Из предложения 2.2(4) следует, что множество $\widetilde{l}_\pi \cap U$ состоит из критических в ситуации $\{(\widetilde{l}, B), \pi\}$ точек. Функция G (см. (3)) определена во всех точках $x \in \mathcal{X}$, поэтому область U состоит из точек, в которых уравнение вырождается, то есть $\dfrac{\partial G(x)}{\partial x^k} = 0$, $k = 1, 2$. Непосредственно из определения следует критерий существования областей ветвления ламбертовой кривой (l, A)

Предложение 2.4. *Пара (l, A) обладает областью ветвления U тогда и только тогда, когда функция $\widetilde{A}(y) \in C^1(U)$ удовлетворяет в U соотношениям*

$$f_j + \frac{\partial \ln \widetilde{A}(y)}{\partial m_j} = 0, \quad j = 1, 2, \tag{7}$$

где приняты обозначения, заданные формулами (4).

Доказательство. Из требования (b) определения области ветвления вытекает, что для всякой точки $x \in l_\pi \cap U$ существует положительные вещественные $\varepsilon_j(x)$, $\delta_j(x)$ такие, что

$$\mathcal{L}_{xq_j} \cap U = x + t_j \frac{q_j - x}{|q_j - x|}, \quad t_j \in \big(-\varepsilon_j(x)\,,\, \delta_j(x)\big), \quad j = 1, 2.$$

Кроме того, имеют место равенства

$$c_j(x) A(x) = c_j(x + t_j m_j) \widetilde{A}(x + t_j m_j), \quad j = 1, 2. \tag{8}$$

Дифференцирование последних соотношений по t_j, при $t_j \to 0$, приводит к тому, что уравнения (7) справедливы при $x \in l_\pi \cap U$. Точка x выбрана произвольно, пара $(l, \widetilde{A})$ — любая из семейства $(Sl, \widetilde{A})$. Следовательно, соотношения (7) выполняются во всей области U.

Теперь предположим, что существует совпадающая с A на участке $l_\pi \cap U$ функция $\widetilde{A}(y) \in C^1(U)$, которая удовлетворяет формулам (7). В соответствии с (4) их тогда можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial m_j} \ln \big(c_j(y) \widetilde{A}(y) \big) = 0, \quad j = 1, 2. \tag{9}$$

Соотношения (9) означают, что произведения $c_j(y)\widetilde{A}(y)$ постоянны при $y \in \mathcal{L}_{xq_j} \cap U$, где x —произвольная точка множества U. Фиксируя любую кривую l из семейства Sl и выбирая функцию яркости A на ней совпадающей с ограничением $\widetilde{A}(y)$ на множество $l_\pi \cap U$, получим равенство $c_j(x)A(x) = c_j(x+t_jm_j)\widetilde{A}(x+t_jm_j)$, $t_j \in \big(-\varepsilon_j(x)\,,\,\delta_j(x)\big)$, $j=1,2$. $\square$

Рассмотрим частные случаи весовых функций и проанализируем их с учетом предложения 2.4. Если весовые функции принадлежат классу (WF1), $c_j(x) = \text{const}$, то функции $f_j(x)$ обращаются в нуль, и формулы (7), (8) означают тогда, что справедлив следующий вывод.

Следствие 2.5. *Задача восстановления ламбертовой кривой (l, A) по стереопаре ее резких изображений, полученных посредством проекционных схем с постоянными весовыми функциями, имеет единственное решение тогда и только тогда, когда не существует открытых сегментов на участке l_π кривой l, в которых функция яркости постоянна.*

Пусть весовые функции принадлежат семейству (WF2), то есть имеют вид $c_j(x) = \mathrm{e}^{-\varepsilon|x-q_j|}$, $\varepsilon > 0$. Так как $\dfrac{\partial c_j(x)}{\partial x^k} = -\varepsilon \mathrm{e}^{-\varepsilon|x-q_j|}m_j^k$, $j,k=1,2$, то $f_j = \dfrac{\langle \nabla c_j(x), m_j\rangle}{c_j(x)} = -\varepsilon$ для $j=1,2$. Соотношения (7) тогда приобретают вид

$$\frac{\partial \ln \widetilde{A}(y)}{\partial m_j} = \big(d\ln \widetilde{A}(y)\big)(m_j) = \varepsilon.$$

Интегрируя вдоль малых участков прямых $\mathcal{L}_{xq_j}$, $x \in l_\pi$, получаем, что

$$\widetilde{A}(y) = \widetilde{A}(x+t_jm_j) = A(x)\mathrm{e}^{\varepsilon t_j}, \quad t_j \in (0, \delta_j(x)).$$

Положим точку x принадлежащей участку l_π кривой l. Легко видеть, что тогда гладкое продолжение функции $A(x)$ вдоль двух прямых, соединяющих точки x, q_j, $j=1,2$, невозможно, так как в ином случае функция $\widetilde{A}(y)$ зависела бы от двух различных произвольно расположенных точек q_1, q_2. Поэтому какова бы ни была функция A, построение ее гладкого продолжения в область U невозможно, и областей ветвления у пар (l, A) относительно проекционных схем $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ с весовыми функциями c_j, $j=1,2$ класса (WF2) не существует.

Для весовых функций из семейства (WF3) вида $c(x, q_j) = \mathrm{e}^{-\sigma^2|x-q_j|^2}$, приходим к формулам для f_j, $f_j = \dfrac{\langle \nabla c_j(x), m_j\rangle}{c_j(x)} = -2\sigma^2|x-q_j|, j=1,2$. Предложение 2.4 означает, что пара (l, A) обладает областью ветвления U, если выполнено соотношение $\sigma^2|y-q_1|^2 = \sigma^2|y-q_2|^2$ для любой точки

$y \in U$ и точек q_1, q_2 с произвольным расположением. Равенство выполняется лишь в точках прямой, проходящей через середину отрезка $[q_1, q_2]$ перпендикулярно ему. Таким образом, областей ветвления у ламбертовых кривых, размещенных в среде с весовыми функциями из семейства (WF3), не существует.

Вычислим функции f_j, $j = 1, 2$, для весовых функций из класса (WF4), $c(x, q_j) = |x - q_j|^r$, $r \neq 0$. В этом случае $f_j = \dfrac{\langle \nabla c_j(x), m_j \rangle}{c_j(x)} = \dfrac{r}{|x - q_j|}$ для $j = 1, 2$. Обращаясь к предложению 2.4, делаем вывод, что пара (l, A) обладает областью ветвления U при выполнении соотношения $|y - q_1| = |y - q_2|$ для любой точки $y \in U$ и произвольно расположенных точек q_1, q_2.

Таким образом, у ламбертовой кривой (l, A) в случае весовых функций типа (WF4) отсутствуют области ветвления, как и у ламбертовых кривых в случае весовых функций семейств (WF2), (WF3).

Следствие 2.6. *Ламбертова кривая (l, A) не обладает областями ветвления, если ее изображения получены посредством проекционных схем с весовыми функциями из семейств (WF2), (WF3), (WF4).*

Следствия 2.5, 2.6означают, что весовая функции (WF1) заметно отличается от остальных. Нами установлен критерий наличия или отсутствия областей ветвления $U \subset \mathcal{X}_\pi$ $U \cap l_\pi \neq \emptyset$, которые обладают топологической размерностью 2. Остается не ясным наличие или отсутствие точек ветвления из множеств топологической размерности меньше двух. Поэтому необходимо дальнейшее изучение задачи.

§ 3. Восстановление кривой

Рассмотрим дифференциальную форму ω_π, определенную соотношением (5). Для $x \in l_\pi$ и единичного касательного вектора τ к кривой l в точке x положим

$$\tau = \alpha(x) m_1 + \beta(x) m_2.$$

Из условий

$$\langle q_j - x, n_x \rangle > 0, \quad j = 1, 2, \tag{10}$$

и сонаправленности векторов τ и $q_2 - q_1$ следует, что $\alpha(x) < 0$, $\beta(x) > 0$. Введем обозначения $D = \langle m_1, m_2 \rangle$, $e^2 = 1 - D^2$. Принимая во внимание (10), выражая нормаль n_x через векторы m_1, m_2 и функции α, β, получаем формулы

$$\langle m_1, n_x \rangle = \beta(x)\sqrt{1 - D^2}, \quad \langle m_2, n_x \rangle = -\alpha(x)\sqrt{1 - D^2},$$

$$|\langle m_2, n_x \rangle m_1 - \langle m_1, n_x \rangle m_2| = \sqrt{1 - D^2}.$$

Используя найденные выражения в (5), получим

$$\big(\omega_\pi(x)\big)(\tau) = \alpha(x) f_1 + \beta(x) f_2, \tag{11}$$

а выражая функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ через m_1, m_2, τ и D,

$$\alpha(x) = \frac{\langle m_1 - Dm_2, \tau\ rangle}{e^2}, \quad \beta(x) = \frac{\langle m_2 - Dm_1, \tau\rangle}{e^2},$$

представим дифференциальную форму ω_π в виде

$$\big(\omega_\pi(x)\big)(\tau) = \Big\langle \frac{f_1 - Df_2}{e^2} m_1 + \frac{f_2 - Df_1}{e^2} m_2\,,\, \tau\Big\rangle. \tag{12}$$

Функции f_1, f_2 и векторы m_1, m_2 определены в любой точке $x \in \mathcal{X}_\pi$, поэтому форма ω_π (5) может быть продолжена на все множество $\mathcal{X}_\pi$, а ее действие на вектор τ описывается соотношением (12).

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} h_j = \frac{f_j - Df_{3-j}}{e^2}, \quad g_j^k = \frac{1}{e^2}\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x^k} - D\frac{\partial f_{3-j}}{\partial x^k}\Big), \quad j,k = 1,2, \\ G(x) = (m_1 \times g_2) + (m_2 \times g_1) + e\Big(\frac{h_1}{|q_1 - x|} - \frac{h_2}{|q_2 - x|}\Big), \end{gathered} \tag{13}$$

где $v_1 \times v_2 = v_1^1 v_2^2 - v_1^2 v_2^1$ для векторов $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Пусть l — гладкая кривая, заданная в $\mathbb{R}^2$ параметрическими уравнениями $x = x(s) = (x^1(s), x^2(s))$; параметр — длина дуги s возрастает в направлении, совпадающим с направлением вектора τ. Выберем любую точку $x_0 \in l_\pi \subset l$ и окрестность U этой точки в $\mathbb{R}^2$ такую, что выполняется включение $U \cup l_\pi \subset \mathcal{X}_\pi$. Тогда окрестности $V = U \cap l_\pi$ точки x_0 на кривой l соответствует открытый интервал $V_s = (s_0 - \delta_1, s_0 + \delta_2) \subset \mathbb{R}$, $x(s_0) = x_0$, для некоторых положительных вещественных чисел δ_1, δ_2. Полагая $B(s) = A(x(s))$, представим форму-дифференциал яркости в точке $x \in V$ на касательном векторе τ в форме

$$\mathrm{d}A(x,\tau) = \frac{\partial A}{\partial x^1}\frac{dx^1}{ds} + \frac{\partial A}{\partial x^2}\frac{dx^2}{ds} = \frac{dB}{ds}.$$

Как установлено в предложении 2.2 (4), множество точек ветвления пары (l, A) содержится в множестве критических для ситуации $\{(l,A),\pi\}$ точек, поэтому возникает вопрос об описании множества критических точек на участке кривой l_π, который сводится (теорема 2.1(3)) к вопросу существования положительной непрерывно дифференцируемой функции $B(s)$, $s \in V_s$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{d\big(\ln B(s)\big)}{ds} = \alpha(x(s)) f_1(x(s)) + \beta(x(s)) f_2(x(s)) =: \widetilde{g}(s) \tag{14}$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 3, С. 52-73
Mat. Trudy, 2024, V. 27, N. 3, P. 52-73

и начальному условию $B(s_0) = B_0 > 0$. Следовательно, всякое открытое множество $V \subset l_\pi$ состоит из критических точек ламбертовой кривой (l, A), если функция яркости есть решение уравнения (14). Напомним, что для существования и единственности решения уравнений такого класса достаточно непрерывности его правой части, что следует из того, что весовые функции c_j проекционных схем $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ обладают гладкостью C^2 при $x \in \mathcal{X}_\pi$, кривая l — гладкостью C^1, функции яркости $A(x)$ — гладкостью C^1 при $x \in l$. Дополнительно считаются выполненными "условия видимости" участка l_π кривой l.

Пусть функция $B(s)$ является решением дифференциального уравнения (14) с начальным условием $B(s_0) = B_0 > 0$. Точка $y \in \mathcal{X}_\pi$ такова, что точки x_1, x_2 — точки пересечения кривой l с прямыми $\mathcal{L}_{yq_1}$, $\mathcal{L}_{yq_2}$, соответственно, — принадлежат окрестности V точки x_0. Обозначим через Δ_y множество (треугольник) из $\mathcal{X}_\pi$, ограниченное участком кривой между точками x_1, x_2 и отрезками $[y, x_j] \in \mathcal{L}_{yq_j}$, $j = 1, 2$. В этих предположениях справедлива

Лемма 3.7. *Если $G(x) = 0$ для любой точки $x \in \Delta_y$, то точка y является сопровождающей в ситуации $\{(l, A), \pi\}$.*

Доказательство. Пусть функция $G(x)$, определенная соотношением (13) на множестве $\mathcal{X}_\pi$, обращается в нуль в точках $x \in \Delta_y$. Пользуясь общим координатным представлением дифференциальной формы первой степени, обозначениями (13) и представлением (12), получаем

$$\omega_\pi(x) = p_1 dx^1 + p_2 dx^2 = (h_1 m_1^1 + h_2 m_2^1) dx^1 + (h_1 m_1^2 + h_2 m_2^2) dx^2.$$

Рассматривая криволинейный интеграл по контуру $\partial\Delta_y$, по теореме Грина имеем

$$\oint\limits_{\partial\Delta_y} (p_1\, dx^1 + p_2\, dx^2) = \iint\limits_{\Delta_y} \Big(\frac{\partial p_2}{\partial x^1} - \frac{\partial p_1}{\partial x^2}\Big)\, dx^1\, dx^2. \tag{15}$$

Прямыми вычислениями нетрудно убедиться в том, что $G(x) = 0$ в любой точке $x \in \Delta_y$ тогда и только тогда, когда соотношение $\dfrac{\partial p_2}{\partial x^1} = \dfrac{\partial p_1}{\partial x^2}$ выполняется в Δ_y тождественно. Следовательно, двойной интеграл в (15) обращается в нуль. Интегрируя (14) в промежутках $[s_1, s_0]$, $[s_0, s_2]$, получаем

$$\int\limits_{s_1}^{s_2} \widetilde{g}(s)\, ds = \ln \frac{B(s_2)}{B(s_1)} = \ln \frac{A(x_2)}{A(x_1)}. \tag{16}$$

Здесь $s_1 = s_0 - \delta_1$, $s_2 = s_0 + \delta_2$, $x_1 = x(s_1)$, $x_2 = x(s_2)$. Возвращаясь к (15) и используя представление (11) формы ω_π, получаем

$$0 = \oint\limits_{\partial\Delta_y} (p_1\,dx^1 + p_2\,dx^2) = \int\limits_{s_1}^{s_2} \widetilde{g}(s)\,ds + \int\limits_{[x_1,y]} (\alpha f_1 + \beta f_2)\,dl + \int\limits_{[y,x_2]} (\alpha f_1 + \beta f_2)\,dl. \tag{17}$$

Принимая во внимание направление обхода контура $\partial\Delta_y$, получим что в первом из двух интегралов по отрезкам $\alpha = 1$, $\beta = 0$, а во втором $\alpha = 0$, $\beta = -1$. Соотношения (16) и (17) дают

$$\ln\frac{A(x_2)}{A(x_1)} = \int\limits_{s_1}^{s_2} \widetilde{g}(s)\,ds = \int\limits_{[x_1,y]} f_2\,dl - \int\limits_{[y,x_2]} f_1\,dl.$$

Пользуясь определением функций $f_j = \dfrac{\partial c_j(x)}{\partial m_j}$, $j = 1, 2$, приходим к соотношению

$$\ln\frac{A(x_2)}{A(x_1)} = \ln\frac{c_2(y)}{c_2(x_2)} + \ln\frac{c_1(x_1)}{c_1(y)},$$

и по тереме 2.1(1) точка y — сопровождающая. $\square$

В тех же предположениях, которые делались относительно функций $B(s)$, $\widetilde{g}(s)$ и множества Δ_y, справедлива

Лемма 3.8. *Пусть выполнено условие*

$$\iint\limits_{\Delta_y} \Big(\frac{\partial p_2}{\partial x^1} - \frac{\partial p_1}{\partial x^2}\Big)\,dx^1\,dx^2 \neq 0.$$

Тогда точка y не является сопровождающей.

Доказательство. Сразу следует из соотношения (15) и равенств

$$\ln\frac{A(x_2)}{A(x_1)} = \int\limits_{s_1}^{s_2} \widetilde{g}(s)\,ds = \oint\limits_{\partial\Delta_y} (p_1\,dx^1 + p_2\,dx^2) + \ln\frac{c_2(y)}{c_2(x_2)} + \ln\frac{c_1(x_1)}{c_1(y)},$$

в последнем из которых криволинейный интеграл отличен от нуля в силу условия леммы. Соотношения (6) не выполнены, и точка y не является сопровождающей в ситуации $\{(l, A), \pi\}$. $\square$

Пусть $x_0 \in l_\pi$. Окрестность U (в $\mathbb{R}^2$) точки x_0 такова, что $U \cap l_\pi = V \subset l_\pi$. Определим множество W как $W = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mathcal{L}_{yq_j} \cap V \neq \emptyset, j = 1, 2\}$ и введем обозначения $U_1 = W \cap U$, $V_1 = W \cap V$.

Теорема 3.9. *Пусть в окрестности V точки x_0 функция яркости $A(x(s)) = B(s) \in C^1(\bar{V}_s)$ является решением дифференциального уравнения (14), удовлетворяющим начальному условию $B(s_0) = B_0 > 0$, функция $\widetilde{g}(s) \in C(\bar{V}_s)$. Тогда, если для всякой точки $y \in U_1$ выполняется $G(y) = 0$, то любая точка $x \in V_1$ — точка ветвления. С другой стороны, если $G(y) \neq 0$ для любой точки $y \in U_1$, то никакая точка $x \in V_1$ не является точкой ветвления ламбертовой кривой (l, A).*

Доказательство. Выберем точку $x \in V_1$ и последовательность $\{y_n\} \to x$ при $n \to \infty$, такую что $y_n \in U_1$, $y_n \notin V_1$ для всякого натурального n. Образуем последовательность треугольников Δ_{y_n} с вершинами y_n, x_{1n}, x_{2n}, где $x_{jn} = \mathcal{L}_{yq_j} \cap V$, $j = 1, 2$. По построению множеств U_1, V_1 треугольники Δ_{y_n} лежат в области U_1. Поэтому, так как $G(y) = 0$ для всех $y \in \Delta_{y_n}$, справедлива лемма 3.7 и $\{y_n\}$ — последовательность сопровождающих точек. Тогда, по определению, предельная точка $x \in V_1$ этой последовательности — точка ветвления пары (l, A).

Пусть теперь $G(y) \neq 0$ во всех точках $y \in U_1$. Условие $G(y) \neq 0$ эквивалентно тому, что $\dfrac{\partial p_2}{\partial y^1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial y^2} \neq 0$ во всех точках $y \in U_1$, поэтому подынтегральная функция двойного интеграла в правой части (15) не меняет знака во всей области U_1, и интеграл отличен от нуля при любом треугольнике $\Delta_y \subset U_1$. По лемме 3.8 множество U_1 не содержит сопровождающих точек и, следовательно, в множестве V_1 отсутствуют точки ветвления. $\square$

Следствие 3.10. *Если в области U_1 функции h_j (13), m_j^k, $j, k = 1, 2$, имеют непрерывные частные производные, то система дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C(y)}{\partial y^1} = C(y)(h_1 m_1^1 + h_2 m_2^1), \\ \dfrac{\partial C(y)}{\partial y^2} = C(y)(h_1 m_1^2 + h_2 m_2^2). \end{cases} \tag{18}$$

имеет в U_1 единственное решение $C(y)$ такое, что при $x \in V$ $C(x) = A(x(s)) = B(s)$, тогда и только тогда, когда $G(y) = 0$ для всех $y \in U_1$. Здесь $B(s)$ — решение уравнения (14), удовлетворяющее начальному условию $B(s_0) = B_0 > 0$.

Доказательство. Запишем условия согласования системы (18) в виде

$$\frac{\partial(Cp_1)}{\partial y^2} + \frac{\partial(Cp_1)}{\partial C} Cp_2 = \frac{\partial(Cp_2)}{\partial y^1} + \frac{\partial(Cp_2)}{\partial C} Cp_1,$$

где $p_1 = h_1 m_1^1 + h_2 m_2^1$, $p_2 = h_1 m_1^2 + h_2 m_2^2$. Простые преобразования приводят к равенству $\dfrac{\partial p_1}{\partial y^2} = \dfrac{\partial p_2}{\partial y^1}$. Если выполнено условие $G(y) = 0$ при всех $y \in U_1$, то из условий гладкости правых частей системы (18) следует существование и единственность ее решения, которое на множестве V_1 обращается в функцию $B(s)$. Ясно, что этим решением будет функция $C(y) = \dfrac{c_1(x)}{c_1(y)}A(x)$ $= \dfrac{c_2(z)}{c_2(y)}A(z)$, где $x = \mathcal{L}_{yq_1} \cap V_1$, $z = \mathcal{L}_{yq_2} \cap V_1$. Если же $G(y) \neq 0$ при $y \in U_1$, то условие согласования не выполняется, и в этом случае решения системы не существует. $\square$

В качестве следствий из теоремы 3.9 получим результаты о единственности решения задачи восстановления ламбертовой кривой по стереопаре ее резких изображений для весовых функций семейств (WF1)–(WF3).

Найдем определенную формулой (13) функцию $G(x)$ и ее нули. Для весовой функции $c_j(x) = \mathrm{const}$ функции f_1, f_2 обращаются в нуль, и тогда $G(x) = 0$. В втором случае $c_j(x) = \mathrm{e}^{-\varepsilon|q_j - x|}$ и $f_j = \varepsilon$ при $j = 1, 2$. Частные производные функций f_j обращаются в нуль, и $g_1(x) = g_2(x) = 0$. Следовательно,

$$G(x) = \frac{1}{e}\Big(\frac{\varepsilon - D\varepsilon}{|x - q_2|} - \frac{\varepsilon - D\varepsilon}{|x - q_1|}\Big) = \varepsilon\frac{1 - D}{e}\Big(\frac{1}{|x - q_1|} - \frac{1}{|x - q_2|}\Big). \qquad (19)$$

Величины $\varepsilon, e, 1-D$ не обращаются в нуль, поэтому $G(x) = 0$ если и только если $|x-q_1| = |x-q_2|$, откуда следует, что нули функции $G(x)$ принадлежат прямой $\mathcal{L}_1$, проходящей через середину отрезка $[q_1, q_2]$ перпендикулярно ему.

Предложение 3.11. *Пусть (l, A) — ламбертова кривая, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ — проекционные схемы, такие что $l_\pi = l \cap \mathcal{X}_\pi \neq \emptyset$, и прямые $\mathcal{L}_{xq_j}$, $x \in l_\pi$, $j = 1, 2$, пересекаются с l_π не более чем в одной точке. Если весовые функции суть функции вида $c_j(x) = \mathrm{e}^{-\varepsilon|x - q_j|}$, то участок кривой l_π не содержит точек ветвления.*

Доказательство. Доказательство ведется от противного. Предположим, что $x_0 = l \cap \mathcal{L}_1 \in l_\pi$. Выберем произвольную точку $y \in l_\pi$, $y \neq x_0$ и предположим, что она является точкой ветвления. Тогда, по определению, существует последовательность $\{y_n\}$ сопровождающих точек, сходящаяся к точке y. Так как $y \neq x_0$, то можно выбрать окрестность U_0 точки y такую, что $x_0 \notin U_0$. Легко видеть, что функция $G(x)$ (19) при $x \in U_0$ не меняет знак. Пусть для определенности $G(x) > 0$ при $x \in \Delta_{y_n}$ (см. лемма 3.7). Так как, начиная с некоторого n_0, все треугольники Δ_{y_n} с вершинами в точках y_n, $n \geq n_0$, лежат в окрестности U_0 и $G(x) > 0$ при $x \in \Delta_{y_n}$, то

$$\iint\limits_{\Delta_{y_n}} \Big(\frac{\partial p_2}{\partial x^1} - \frac{\partial p_1}{\partial x^2}\Big)\, dx^1\, dx^2 > 0.$$

Опираясь на лемму 3.8, делаем вывод о том, что точки y_n при $n \geq n_0$ не являются сопровождающими. Точка y и последовательность сходящихся к ней точек выбирались произвольно, поэтому все точки $y \in l_\pi$, за исключением, быть может, точки x_0, не являются точками ветвления. Из условия видимости следует, что нам интересны лишь те последовательности сопровождающих точек, которые не лежат в конусе с вершиной в точке x_0, образованном прямыми $\mathcal{L}_{x_0 q}$, $q \in [q_1, q_2]$. В точности повторяя приведенные выше рассуждения, показываем, что не существует последовательностей сопровождающих точек, сходящихся к точке x_0, и, следовательно, точка x_0 также не является точкой ветвления. $\square$

Обратимся к весовой функции вида $c_j(x) = \mathrm{e}^{-\sigma^2|x-q_j|^2}$, $j = 1, 2$. В этом случае
$$\frac{\partial c_j(x)}{\partial x^k} = -2\sigma^2|x - q_j|\mathrm{e}^{-\sigma^2|x-q_j|^2} m_j^k, \quad j, k = 1, 2,$$
и тогда $f_j = -2\sigma^2|x - q_j|$. Так как $\dfrac{\partial f_j}{\partial x^k} = -2\sigma^2 m_j^k$, $j, k = 1, 2$, то
$$\begin{aligned} G(x) = \frac{1}{e}\Big(&\frac{-2\sigma^2|x-q_1| + 2D\sigma^2|x-q_2|}{|x-q_1|} - \frac{-2\sigma^2|x-q_2| + 2D\sigma^2|x-q_1|}{|x-q_2|}\Big) \\ &+ \frac{-2\sigma^2}{e^2}\big(m_1^1(m_1^2 - Dm_2^2) - m_1^2(m_1^1 - Dm_2^1) + m_2^1(m_2^2 - Dm_1^2) \\ &-m_2^2(m_2^1 - Dm_1^1)\big) = -\frac{2\sigma^2}{e}D\Big(- \frac{|x-q_2|}{|x-q_1|} + \frac{|x-q_1|}{|x-q_2|}\Big) \\ &-\frac{2\sigma^2}{e^2}D\big(- (m_1^1 m_2^2 - m_1^2 m_2^1) + (m_1^1 m_2^2 - m_1^2 m_2^1)\big) \\ &= \frac{2\sigma^2 D}{e}\Big(\frac{|x-q_2|}{|x-q_1|} - \frac{|x-q_1|}{|x-q_2|}\Big). \end{aligned}$$
Геометрическое место нулей функции $G(x)$ — прямая $\mathcal{L}_1$, перпендикулярная отрезку $[q_1, q_2]$ и проходящая через его середину.

Рассмотрим случай, когда весовая функция принадлежит семейству (WF4), то есть имеет вид $c_j(x) = |x - q_j|^r$, $j = 1, 2$. Тогда $f_j = \dfrac{r}{|x - q_j|}$, и $\dfrac{\partial f_j}{\partial x^k} = -r\dfrac{m_j^k}{|x - q_j|^2}$. Непосредственные вычисления дают для величин $m_1 \times g_2$, $m_2 \times g_1$ выражения $-\dfrac{r(m_1 \times m_2)}{e^2|x-q_2|^2}$, $\dfrac{r(m_1 \times m_2)}{e^2|x-q_1|^2}$, соответственно. Величина $\dfrac{h_2}{|x-q_2|} - \dfrac{h_1}{|x-q_1|^2}$ приобретает вид $-\dfrac{r}{e}\Big(\dfrac{1}{|x-q_2|^2} - \dfrac{1}{|x-q_1|^2}\Big)$. Таким образом, имеем $G(x) = \dfrac{2r}{e}\Big(\dfrac{1}{|x-q_2|^2} - \dfrac{1}{|x-q_1|^2}\Big)$. Как и в предыдущих случаях принадлежности весовых функций семействам (WF2), (WF3), геометрическое место нулей функции $G(x)$ — прямая $\mathcal{L}_1$, перпендикулярная отрезку $[q_1, q_2]$ и проходящая через его середину.

Теми же рассуждениями, которые была проведены при доказательстве предложения 3.11, можно установить справедливость следующего результата.

Предложение 3.12. *Пусть (l, A) — произвольная ламбертова кривая, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — две проекционные схемы, такие что $l_\pi = l \cap \mathcal{X}_\pi \neq \emptyset$, и прямые $\mathcal{L}_{xq_j}$, $x \in l_\pi$, $j = 1, 2$, пересекаются с l_π не более чем в одной точке. Если весовые функции $c_j(x)$ принадлежат семействам (WF3), (WF4), то участок кривой l_π не содержит точек ветвления.*

§ 4. Заключение

При проведении фотограмметрических работ в качестве данных часто выступают стереопары изображений каких-либо участков земной поверхности. Обработка такой информации опирается на часто используемый в математике прием, позволяющий заменять трехмерную задачу серией двумерных, и яркий пример такого подхода — задачи томографии. Стереопара изображений сводится к серии "плоских" задач путем реализации понятия эпиполярной плоскости, которая вырезает пару эпиполярных отрезков на изображениях и эпиполярную линию, представляющую собой след эпиполярной плоскости на рельефе.

В настоящей работе под задачей восстановления кривой (2D задачей) подразумевается восстановление следа эпиполярной плоскости на рельефе по ее известным следам на эффективных областях проекционных схем стереопары изображений. Исследованы условия единственности решения 2D задачи определения оптической кривой, функция яркости которой в каждой точке изотропна по всем направлениям, то есть подчиняется закону Ламберта. Отсутствие точек ветвления и выполнение условия видимости кривой из двух проекционных схем, наряду с заданными координатами хотя бы одной точки на кривой, гарантируют единственность решения задачи восстановления искомой кривой по двум ее изображениям. Весовые функции семейств (WF2)–(WF4) удовлетворяют этим условиям, и задача определения геометрического расположения кривой сводится к решению неявного уравнения.

Постоянные весовые функции семейства (WF1) существенно отличаются от остальных. Так, при наличии участков постоянной яркости на ламбертовой кривой, по стереопаре изображений невозможно установить "истинный" участок кривой, который дает те же изображения, что и любой другой видимый из двух заданных проекционных схем участок, принадлежащий четырехугольнику, образованному прямыми, проходящими через центры проекционных схем и граничные точки участка кривой с постоянной яркостью.

В рамках постановок обратных задач фотометрии рассмотрены вопросы определения геометрического положения и светимости ламбертовой оптической кривой по стереопаре ее изображений, полученной посредством двух проекционных схем. Изучены причины возникновения неоднозначности определения расположения кривой на плоскости. Для произвольных весовых функций установлены критерии единственности решения обратной задачи восстановления участков ламбертовых оптических кривых. Результаты распространены на конкретные классы весовых функций, моделирующих свойства среды между кривой и проекционными схемами, такие как поглощение, рассеяние либо характеристики, зависящие лишь от расстояний между точками кривой и центрами проекционных схем.

Настоящая статья является заключительной в серии из трех работ по исследованию вопросов единственности решения обратных задач фотометрии по восстановлению расположения и светимостей оптических источников топологической размерности $0, 1, 2$. Изученные задачи можно трактовать и как задачи томографии или интегральной геометрии по восстановлению обобщенных функций с сингулярными носителями, сосредоточенными на семействах точек, кривых и поверхностях трехмерного евклидова пространства.

Список литературы

1. *Михайлов А. П., Чибуничев А. Г. Фотограмметрия* / Учебник для вузов / Под общ. ред. А. Г. Чибуничева. М.: Изд-во МИИГАиК, 2016.

2. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции, вып. 5. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.* М.: Физматгиз, 1962.

3. *Лобанов А. Н., Журкин И. Г. Автоматизация фотограмметрических процессов* / Москва: Недра, 1980.

4. *Softline* Фотограмметрия с БПЛА. Картография по беспилотникам // *https://slddigital.com/article/Kartografiya-po-bespilotnikam/*. 2018.

5. *Янкелевич С. С., Радченко Л. К., Антонов Е. С.* От многоцелевого картографического ресурса к «Умной карте» // *Вестник СГУГиТ.* 2018. Т. 23, № 1. С. 142—155.

6. *Кирейтов В. Р.* О задаче восстановления оптической поверхности по ее изображениям // *Функц. анализ и его прил.* 1975. Т. 10, № 3. С. 45—54.

7. *Кирейтов В. Р. Обратные задачи фотометрии.* Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР, 1983.

8. *Деревцов Е. Ю.* Определение параметров совокупности излучающих точек по их изображениям // *Матем. тр.* 2023. Т. 26, № 2. С. 62—85.

9. *Derevtsov E. Yu.* Unique Reconstruction of a Lambertian Optical Surface from Images // *Siberian Adv. Math.* 2024. V. 34. No. 3. P. 196—208.

10. *Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии* / М.: Мир, 1983.

11. *Gardner R. J. Geometric Tomography* / 2nd edition. New York: Cambridge University Press, 2006.

References

1. *Mikhailov A. P., Chibunichev A. G. Photogrammetry* / Uchebnik dlia vuzov / Pod obsh. red. A. G. Chibunicheva. M.: Izd-vo MIIGAiK, 2016.

2. *Gelfand I. M., Graev M. I., Vilenkin N. Ya. Generalized Functions, Vol 5. Integral Geometry And Representation Theory.* New York: Academic Press inc. 111 Fifth Avenue, New York, 1966.

3. *Lobanov A. N., Zhurkin I. G. Automation of photogrammetric processes* / Moskva: Nedra, 1980.

4. *Softline* Photogrammetry from UAVs. Drone cartography // *https://slddigital.com/article/Kartografiya-po-bespilotnikam/.* 2018.

5. *Yankelevich S. S., Radchenko L. K., Antonov E. S.* From a multi-purpose cartographic resource to a “Smart Map“ // *Vestnik SGUGiT.* 2018. V. 23, N 1. P. 142—155.

6. *Kireitov V. R.* On the problem of reconstructing an optical surface from its images // *Funkts. analiz i ego pril.* 1975. V. 10, N 3. P. 45—54.

7. *Kireitov V. R. Inverse problems of Photometry.* Novosibirsk: Vyichislitel’ny tsentr SO AN SSSR, 1983.

8. *Derevtsov E. Yu.* Reconstruction of Parameters of a Set of Radiant Points from Their Images // *Siberian Adv. Math.* 2023. Vol. 33, No. 4. pp. 261–275.

9. *Derevtsov E. Yu.* Unique Reconstruction of a Lambertian Optical Surface from Images // *Siberian Adv. Math.* 2024. V. 34. No. 3. P. 196—208.

10. *Herman G. T. Image Reconstruction from Projections. The Fundamentals of Computerized Tomography* / New York-London: Academic Press, 1980.

11. *Gardner R. J. Geometric Tomography* / 2nd edition. New York: Cambridge University Press, 2006.

Информация об авторе

Евгений Юрьевич Деревцов, Доктор физико-математических наук, доцент

SPIN-код 6372-6408, AuthorID 15034
AuthorID 6507922492
ResearcherID: G-2452-2019

Author Information

Evgeny Yu. Derevtsov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

SPIN-код 6372-6408, AuthorID 15034
AuthorID 6507922492
ResearcherID: G-2452-2019

Статья поступила в редакцию 27.08.2024;
одобрена после рецензирования 19.10.24; принята к публикации 26.09.24

The article was submitted 27.08.2024;
approved after reviewing 19.10.24; accepted for publication 26.09.24